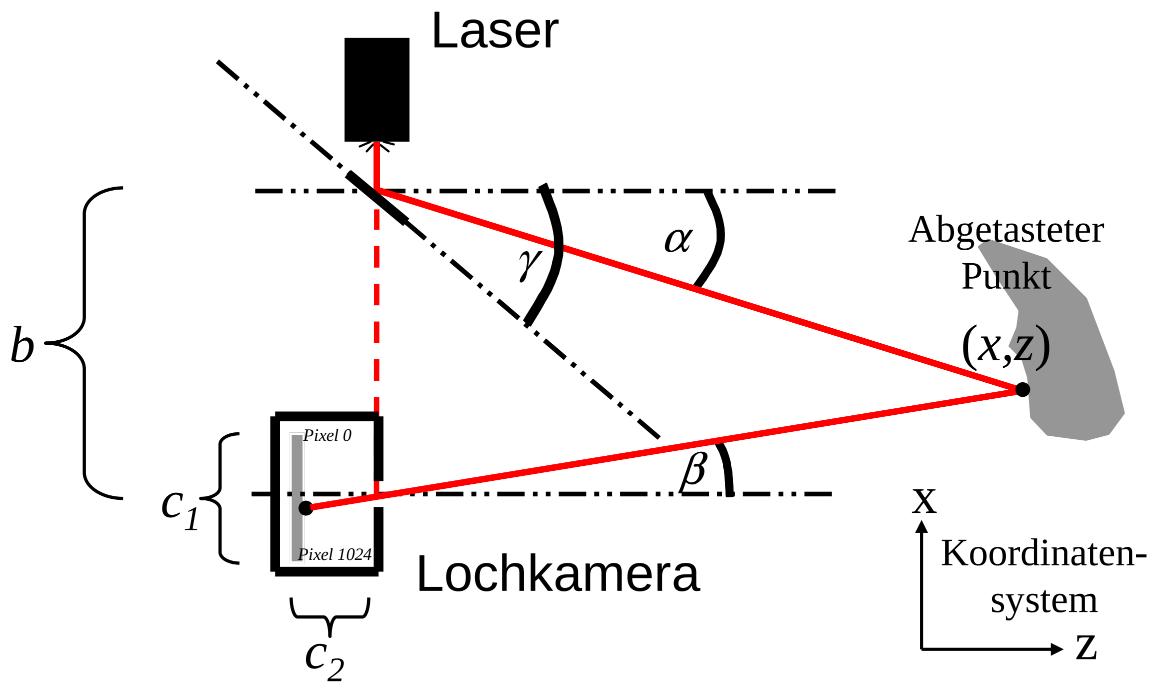
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 Optische Triangulation

In dieser Aufgabe soll die Mathematik eines 3D-Scanners nachvollzogen werden, so dass es theoretisch möglich wäre solch ein Gerät nachzubauen. Gegeben sei ein Aufbau zur aktiven optischen Triangulation (ähnlich zu Folie 20 in *cg1_02-input.pdf*).



Zu Beginn sind folgende Größen bekannt:

- Die Basislänge $b = 50cm$
- Der Spiegelwinkel γ
- Die Länge $c_1 = 2cm$ des Photochips in der Kamera
- Der Abstand $c_2 = 1cm$ des Photochips vom Loch der Kamera
- Die Position des Kameralochs im Koordinatensystem X, Z ist (0,0). Der Ursprung des Systems befindet sich also im Kameraloch und wurde nur zur besseren Übersicht rechts unten im Bild platziert.
- Wir haben es hier mit einer idealisierten Welt zu tun, in der alle in der Kamera eintreffenden Strahlen das Kameraloch, also Koordinate (0,0), passieren.

a) Stellen Sie die Gleichung $\beta = f_1(p)$ auf, um aus einer Pixelposition p (Ganzzahl zwischen 0 und 1024) den Winkel β zu berechnen.

0.5 Punkte

Prof. D. Fellner
Thomas Kalbe
Matthias Bein

Lösungsvorschlag:
Aus der Definition $\tan\alpha = \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}$ folgt
$\tan\beta = \frac{\frac{c_1}{2}\cdot\frac{p-512}{512}}{c_2} = \frac{p-512}{512}$ und damit
$f_1(p) = \beta = \operatorname{atan}\frac{p-512}{512}$

b) Stellen Sie die Gleichung $\alpha = f_2(\gamma)$ auf, um aus dem Spiegelwinkel γ den Winkel α zu berechnen.

0.5 Punkte

Lösungsvorschlag:
Bei einem Spiegelwinkel von $\gamma = 45°$ ist $\alpha = 0°$. Da bei einer Spiegelung der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist verändert sich α doppelt so stark wie γ. Die Gleichung lautet also
$f_2(\gamma) = \alpha = 2\cdot(\gamma - 45°)$

c) Stellen Sie die Gleichung $z = f_3(\alpha,\beta)$ auf, um aus den Winkeln α und β den Tiefenwert z zu berechnen.

0.5 Punkte

Lösungsvorschlag:
Aus den zwei Gleichungen $\tan\alpha = \frac{b-x}{z}$ und $\tan\beta = \frac{x}{z}$ folgt durch Addition
$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{b-x}{z} + \frac{x}{z} = \frac{b}{z}$ und damit
$f_3(\alpha,\beta) = z = \frac{b}{\tan\alpha+\tan\beta}$

d) Stellen Sie die Gleichung $x = f_4(\beta, z)$ auf, um aus dem Winkel β und z die X-Koordinate x zu berechnen.

0.5 Punkte

Lösungsvorschlag:
Wieder aus der Definition des Tanges erhalten wir
$f_4(\beta,z) = x = z\cdot\tan\beta$

e) Stellen Sie nun die Gesamtgleichung $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = f_5(p,\gamma)$ auf, um aus der Pixelposition p und dem Winkel γ die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ des abgetasteten Punktes zu berechnen.

0.5 Punkte

Lösungsvorschlag:
Das Einsetzen der Funktionen ineinander und Ausklammern liefert

$$\begin{aligned} f_5(p,\gamma) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z\cdot\tan\beta \\ z \end{pmatrix} = z\cdot\begin{pmatrix} \tan\beta \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{b}{\tan\alpha+\tan\beta}\cdot\begin{pmatrix} \frac{p-512}{512} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{b}{\tan\left(2\gamma-90°\right)+\frac{p-512}{512}}\cdot\begin{pmatrix} \frac{p-512}{512} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) Zum Spiegelwinkel $\gamma = 58.28253°$ wird ein Laserpunkt bei Pixel 683 in der Kamera registriert. Welche Koordinaten hat der abgetastete Punkt mit obem beschriebenen Aufbau? Das Ergebnis kann dabei auf ganze Millimeter gerundet werden.

0.5 Punkte

Lösungsvorschlag:
Einsetzen von $\gamma = 58.28253°$ und $p = 683$ ergibt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \frac{50cm}{\tan\left(2 \cdot 58.28253° - 90°\right) + \frac{683-512}{512}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{683-512}{512} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{50cm}{\tan 26.56506° + 0.3334} \cdot \begin{pmatrix} 0.3334 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{50cm}{0.834} \cdot \begin{pmatrix} 0.334 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.02cm \\ 59.95cm \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 20cm \\ 60cm \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Rotationsmatrizen

Der Vektor $\mathbf{v} = (1,1,1)^t$ soll durch geeignete Rotationen R_x, R_y, R_z um die x-,y- und z-Achsen auf die Vektoren $(\pm1, \pm1, \pm1)^t$ (also $(-1,1,1)^t, (-1,-1,1)^t$, usw.) transformiert werden.

Stellen Sie für jeden der Vektoren die 3×3-Transformationsmatrix als Kombination der Rotationsmatrizen auf.

Für welche der Fälle genügt eine einfache Rotation, und wann müssen Sie zwei Rotationen hintereinander ausführen?

Wieso genügt es hier, mit 3×3-Matrizen anstelle von homogenen Vektoren und 4×4-Matrizen zu arbeiten?

2 Punkte

Lösungsvorschlag:

Wir verwenden die einfachen Rotationsmatrizen

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

und

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin können wir uns auf die Winkel $\pm 90°$ und $\pm 180°$ beschränken, wobei $\sin(\pm\pi/2) = \pm1, \cos(\pm\pi/2) = 0$ sowie $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = 1$.

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}
R_z(\frac{\pi}{2})\mathbf{v} = (-1,1,1)^t, &\quad R_z(\frac{-\pi}{2})\mathbf{v} = (1,-1,1)^t, \\
R_x(\frac{-\pi}{2})\mathbf{v} = (1,1,-1)^t, &\quad R_x(\pi)\mathbf{v} = (1,-1,-1)^t, \\
R_y(\pi)\mathbf{v} = (-1,1,-1)^t, &\quad R_z(\pi)\mathbf{v} = (-1,-1,1)^t,
\end{aligned}$$

sowie

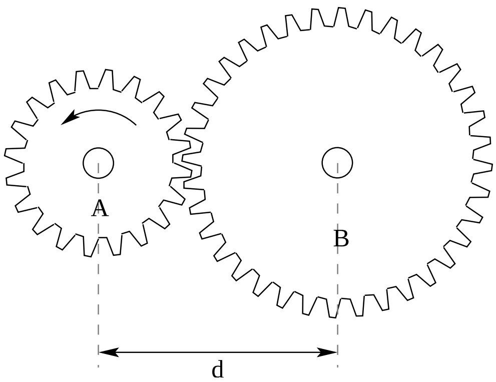
$$R_x(\pi)R_y(\frac{-\pi}{2})\mathbf{v} = (-1,-1,-1)^t.$$

Die Rotationen sind nicht unbedingt eindeutig, z.B. ist $R_z(-\pi/2)\mathbf{v} = R_x(\pi/2)\mathbf{v}$.

Es genügt hier, mit 3×3-Matrizen zu arbeiten, da Rotationen lineare Abbildungen sind. Homogene Vektoren und 4×4-Matrizen wären nötig für eine affine Abbildung.

Aufgabe 3 Transformationen

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für die Darstellung von Zahnrad B, wenn sich Zahnrad A um den Winkel α in Pfeilrichtung gedreht hat.



Zahnrad A hat 20 Zähne, Zahnrad B hat 36 Zähne. Die Rotationsachse von Zahnrad A ist die z-Achse. Der Mittelpunkt von Zahnrad A befindet sich im Ursprung. Die Mittelpunkte der beiden Zahnräder befinden sich in der Ebene $y = 0$ und haben einen Abstand von d.

Geben Sie die Matrix in Form einer Verknüpfung von elementaren Matrizen (Rotationen, Translationen, Skalierungen usw.) inklusive Spezifizierung der Parameter dieser Matrizen an. Es ist nicht notwendig, die Matrix explizit auszurechnen.

2 Punkte

Lösungsvorschlag:
Aus den Angaben kann man entnehmen, dass wenn sich A um eine volle Umdrehung (360°) dreht, dann rotiert B um $\frac{20}{36} \cdot 360°$ in entgegengesetzter Richtung. Der Rotationswinkel von B ist also $-\frac{5}{9}\alpha$. Da sich A im Ursprung befindet und beide Zahnräder in der $y = 0$ Ebene liegen, kann B in mit $-d$ Einheiten in x-Richtung in den Ursprung verschoben werden.

Sei $T(x,y,z)$ die Translation und $R_z(\text{Winkel})$ die Rotation um die z-Achse. Die Transformationsmatrix für die Darstellung von B ergibt sich aus folgenden Einzelkomponenten:

a) Verschiebe B in den Ursprung, also $T(-d,0,0)$

b) Rotiere B um die z-Achse mit Winkel $-\frac{5}{9}\alpha$, also $R_z(-\frac{5}{9}\alpha)$

c) Verschiebe B zurück mit $T(d,0,0)$

Wenn man nun beachtet, dass die Matrizen der Reihe nach links multipliziert werden erhält man die Transformationsmatrix $M = T(d,0,0) \cdot R_z(-\frac{5}{9}\alpha) \cdot T(-d,0,0)$.