Abgabemodalitäten

Abgabetermin: 1.12.2009

Die Theorieaufgaben bitte **geheftet** als Ausdruck oder handschriftlich in der Übung am 1.12 abgeben oder per Email bei den Tutoren (siehe Einführungsfolien) einsenden. Bitte Namen der Gruppenmitglieder auf allen Blättern angeben.

Aufgabe 1 Baryzentrische Koordinaten

a) Gegeben sei das Dreieck $T = [v_0, v_1, v_2]$ in der Ebene, mit $v_0 = (1,0)^t, v_1 = (0,2)^t$ und $v_3 = (0,0)^t$. Geben Sie die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i, i = 0,1,2$ für den Punkt $p = (0.5, 0.5)^t$ explizit an.

1 Punkt

b) **Zeigen Sie**, dass $2 \cdot A(\Delta(v_0, v_1, v_2))$ (siehe Vorlesung) der Determinante der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

für beliebige v_0, v_1, v_2, entspricht.

Hinweis: das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Betten Sie die Vektoren v_i daher geeignet in den $\mathbb{R}^3$ ein. Die Norm $|v|$ ist die übliche 2-Norm:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

1 Punkt

c) **Zeigen Sie** die *affine Invarianz* baryzentrischer Koordinaten bezüglich eines Dreiecks! Konkret ist zu zeigen, dass für eine affine Abbildung der Form

$$\phi(x,y) := A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

wobei A eine 2×2-Matrix und x_0, y_0 Verschiebungen in x- und y-Richtung darstellen, die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes p bezüglich T übereinstimmen mit den baryzentrischen Koordinaten des transformierten Punktes $\phi(p) = \widetilde{p}$ bezüglich des transformierten Dreiecks $\widetilde{T}$.

Welche wichtige Eigenschaft der baryzentrischen Koordinaten ist somit verantwortlich für die affine Invarianz?

2 Punkte

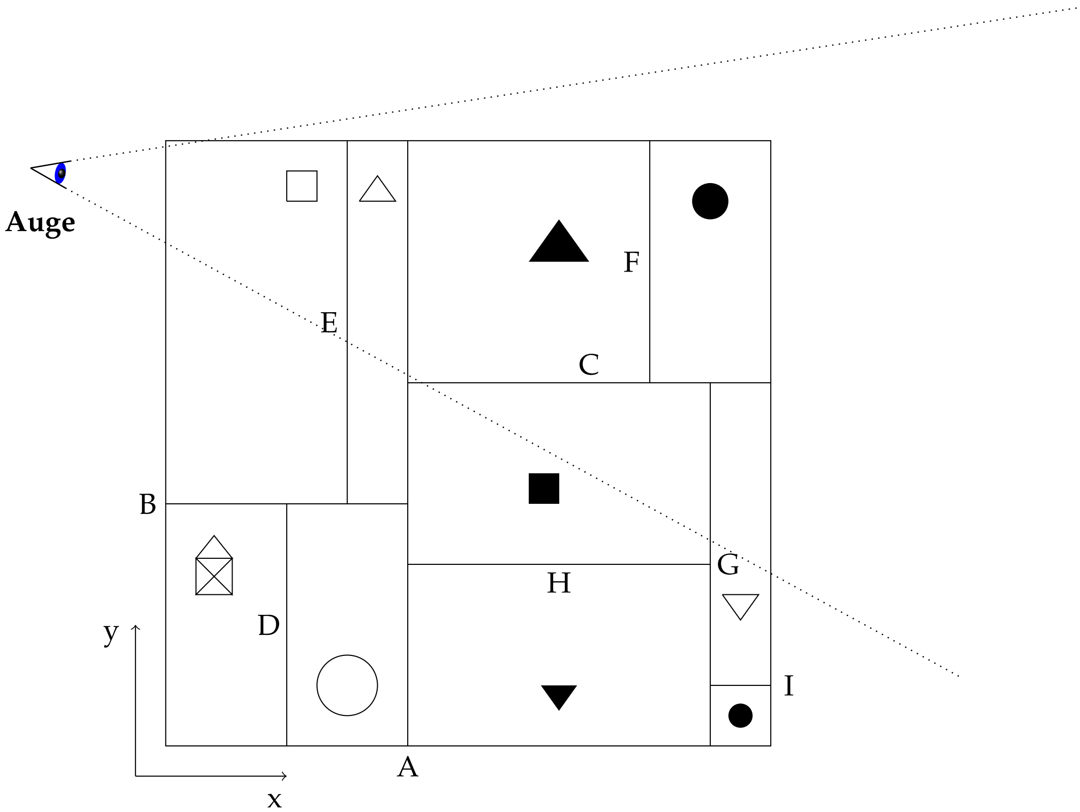
Prof. D. Fellner
Thomas Kalbe
Matthias Bein

Aufgabe 2 Räumliche Datenstrukturen

a) Erklären Sie die Begriffe *Objektredundanz* und *räumliche Redundanz* anhand von Hüllkörperhierarchien und Raumunterteilungen. Wieso sind reguläre Gitter für dynamische Szenen anscheinend besser geeignet als Hüllkörperhierarchien?

1 Punkt

b) Gegeben ist eine 2D-Szene mit Objekten, wobei jedes Symbol ein Objekt repräsentiert. Weiterhin gegeben ist eine KD-Tree–Zerlegung dieser Szene. Die Buchstaben kennzeichnen die Geraden, die die Halbebenen von einander abtrennen.



Zeichnen sie den dazugehörigen Baum dieser Szene. Gehen sie dabei so vor, daß der linke Teilbaum den Raum mit kleineren Koordinaten enthält, der rechte Teilbaum den Raum mit größeren Koordinaten. In den Blättern soll jeweils ein Objekt enthalten sein.

1 Punkt

c) Welche Teilbäume des KD-Tree können für das in b) eingezeichnete View Frustum verworfen werden?

Skizzieren Sie einen robusten Algorithmus, um View Frustum Culling mittels KD-Trees zu verwirklichen. Es genügt, wenn Sie sich auf den 2D-Fall beschränken.

Folgende Fragestellungen können bei der Bearbeitung der Aufgabe hilfreich sein:

- Wie kann für eine Trennlinie (2D!) entschieden werden, ob sie vollkommen innerhalb oder vollkommen außerhalb des View Frustums liegt, oder ob sie es schneidet? Die Geradengleichungen des Frustums seien bekannt. Welche Informationen der Trennlinien benötigen Sie hierfür?

- Angenommen, Sie haben eine Trennlinie als vollkommen außerhalb klassifiziert. Können Sie nun analog ein Entscheidungskriterium finden, welcher der Halbräume innerhalb und welcher außerhalb des Frustums liegt?
- Was bedeuted dies für die Traversierung des Baumes?

2 Punkte

Aufgabe 3 Bounding Volumes

Das Finden eines optimalen sphärischen Hüllkörpers ist aus theoretischer Sicht mit linearem Aufwand möglich. Algorithmen, die dies erreichen sind aber sehr komplex. Wir wollen hier einen einfachen Algorithmus erkunden, der eine fast optimale Kugel findet. Die einzelnen Schritte des Algorithmus sind:

1 Finde zu allen Achsen (x, y und z) zwei Eckpunkte mit je minimalem und maximalem Wert auf dieser Achse.

2 Finde unter diesen drei Paaren das Paar mit maximalem Abstand d voneinander.

3 Initialisiere den Kugelmittelpunkt m in der Mitte zwischen diesem Paar und initialisiere den Radius r der Kugel mit $d/2$.

4 Untersuche alle Eckpunkte der Reihe nach, ob sie in der Kugel liegen. Falls ein Punkt außerhalb liegt, bestimme einen neuen Mittelpunkt und Radius, so dass die alte Kugel komplett in der neuen enthalten ist und die neue Kugel ebenfalls den außerhalb liegenden Punkt umschließt. Anschließend gehe die Eckpunkte weiter durch.

a) Skizzieren Sie ein 2D-Beispiel, in welchem die Initialisierung (bis Schritt 3) der Kugel nicht alle Eckpunkte des Objektes umschließt.

1 Punkt

b) Im vierten Schritt wird ein neuer Mittelpunkt und Radius bestimmt. Ziel dabei ist es, die kleinste Kugel zu erzeugen, die sowohl die alte Kugel als auch den außerhalb liegenden Eckpunkt umschließt. Sei m der Mittelpunkt, r der Radius der alten Kugel, p der außerhalb liegende Punkt und d die Distanz zwischen m und p. Wie berechnet sich der neue Mittelpunkt und der neue Radius?

   Hinweis: Überlegen Sie sich, wo in der alten Kugel der Punkt mit maximalen Abstand zu p liegt. Die neue Kugel muß beide Punkte enthalten, aber auch minimal klein sein.

2 Punkte

c) Welchen Aufwand (abhängig von der Anzahl n der Eckpunkte) hat der hier vorgestellte Algorithmus?

1 Punkt

Prof. D. Fellner
Thomas Kalbe
Matthias Bein